ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип. **21**

УДК 517.5

О. Д. Костюк*, **В. М. Трактинська****, **М. Є. Ткаченко*****

* Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ, 49050. *E-mail:olenka_kostyuk@bk.ru*

** Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ, 49050. *E-mail: victoria-dp@yandex.ua*

*** Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ, 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*

Критерії елемента найкращого наближення функцій багатьох змінних у просторах $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ і $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$

Досліджено питання характеризації елемента найкращого наближення для функцій багатьох змінних у просторах зі змішаною інтегральною метрикою. Одержано критерії елемента найкращого наближення у просторах $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ і $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$.

Ключові слова: змішана інтегральна метрика, елемент найкращого наближення.

Исследованы вопросы характеризации элемента наилучшего приближения для функций многих переменных в пространствах со смешанной интегральной метрикой. Получены критерии элемента наилучшего приближения в пространствах $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ и $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$.

Ключевые слова: смешанная интегральная метрика, элемент наилучшего приближения.

The questions of the characterization of the best approximant for the multivariable functions in spaces with mixed integral metric were considered in this article. The criterions of the best approximant in spaces $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ and $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$ is obtained.

Key words: mixed integral metric, the best approximant.

Нехай $L_{p_1,\ldots,p_n}(1 \le p_i < \infty, 1 \le i \le n)$ – простір дійснозначних сумовних на $K = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, де $I_i = [a_i, b_i], 1 \le i \le n$ функцій n-змінних $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ із нормою

$$\|f\|_{p_1,\ldots,p_n} = \left[\int\limits_{I_n} \ldots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|^{p_1} dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right]^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}}.$$

Покладемо

$$|f|_{p_k,\ldots,p_i} = \left[\int\limits_{I_i} \ldots \left[\int\limits_{I_{k+1}} \left[\int\limits_{I_k} |f(x)|^{p_k} dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1}\right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \ldots dx_i\right]^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1 \leq k < i \leq n$.

Розглянемо також класи $L_{p_1,\ldots,p_n}$ (де хоча б одне $p_i = \infty$) функцій f, скінченні норми яких визначають за формулами

$$\|f\|_{p_1,\ldots,p_{n-1},\infty} = \operatorname{ess}\sup_{x_n \in I_n} |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1}},$$

$$\|f\|_{p_1,\ldots,p_{i-1},\infty,p_{i+1},\ldots,p_n} =$$

$$= \left[\int\limits_{I_n} \ldots \left[\int\limits_{I_{i+1}} \left(\operatorname{ess}\sup_{x_i \in I_i} |f|_{p_1,\ldots,p_{i-1}} \right)^{p_{i+1}} dx_{i+1} \right]^{\frac{p_{i+2}}{p_{i+1}}} \ldots dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}},$$

де $1 \leq i < n$.

Нехай $H_m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ для деякої системи лінійно незалежних функцій $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset L_{p_1,\ldots,p_n}$. Тоді елементи множини H_m (поліноми P_m) подають у вигляді

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k.$$

Для $f \in L_{p_1,\ldots,p_n}$ величину

$$E_m(f)_{p_1,\ldots,p_n} = \inf_{P_m \in H_m} \|f - P_m\|_{p_1,\ldots,p_n} \tag{1}$$

називатимемо найкращим наближенням функції f у просторі $L_{p_1,\ldots,p_n}$ множиною H_m. Поліном P_m^*, який реалізує inf у правій частині (1), називають елементом найкращого наближення функції f множиною H_m.

У 1973 р. Г.С. Смирнов у статті [1] сформулював і довів критерій полінома найкращого наближення у просторах зі змішаною інтегральною метрикою для функцій двох змінних. У [3] В.М. Трактинська узагальнила результат Г.С. Смирнова на випадок функцій багатьох змінних. Нею був одержаний критерій того, що поліном P_m^* – поліном найкращого наближення для функції $f \in L_{p_1,\ldots,p_n}$ за умови $1 < p_i < \infty, 1 \leq i \leq n$. Якщо хоча б одне з $p_i = 1$, цей критерій виявлявся правильним за припущення, що $f - P_m^* \neq 0$ майже скрізь на $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$. У даній статті це обмеження знято за допомогою поширення результатів Г.С. Смирнова [2] (критерій елемента найкращого наближення в просторах $L_{p,1}(I_1 \times I_2)$ і $L_{1,q}(I_1 \times I_2)$) на випадок наближення функцій багатьох змінних.

Нехай $f \in L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ із $||f||_{1,p_2,\ldots,p_n} = |\int\limits_{I_1} |f| dx_1|_{p_2,\ldots,p_n} > 0$ і $g \in L_{\infty,q_2,\ldots,q_n}$ із $||g||_{\infty,q_2,\ldots,q_n} = |\operatorname{ess}\sup\limits_{x_1 \in I_1} |g||_{q_2,\ldots,q_n} \leq 1$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $1 < p_i < \infty$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Застосовуючи нерівність Гельдера і теорему Фубіні, одержуємо

$$\int\limits_{K} f(x) g(x) dx_1 \ldots dx_n \leq \int\limits_{I_n} \ldots \int\limits_{I_1} |f||g| dx_1 \ldots dx_n \leq$$

$$\leq \int\limits_{I_n} \ldots \int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f| dx_1 \right] \left[\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |g| \right] dx_2 \ldots dx_n \leq$$

$$\leq \int\limits_{I_n} \ldots \int\limits_{I_3} \left[\left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f| dx_1 \right]^{p_2} dx_2 \right]^{\frac{1}{p_2}} \right] \left[\int\limits_{I_2} \left[\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |g| \right]^{q_2} dx_2 \right]^{\frac{1}{q_2}} dx_3 \ldots dx_n \leq \ldots \leq$$

$$\leq ||f||_{1,p_2,\ldots,p_n} \cdot ||g||_{\infty,q_2,\ldots,q_n} \leq ||f||_{1,p_2,\ldots,p_n},$$

тобто

$$\int\limits_K f(x)g(x) dx_1 \ldots dx_n \leq ||f||_{1,p_2,\ldots,p_n}. \tag{2}$$

Легко перевірити, що для функції $g_0 \in L_{\infty,q_2,\ldots,q_n}$ вигляду

$$g_0 = ||f||^{1-p_n}_{1,p_2,\ldots,p_n} |f|^{p_2-1}_1 |f|^{p_3-p_2}_{1,p_2} |f|^{p_4-p_3}_{1,p_2,p_3} \cdot \ldots \cdot |f|^{p_n-p_{n-1}}_{1,p_2,\ldots,p_{n-1}} \cdot \operatorname{sgn} f$$

у нерівності (2) досягається знак рівності і що всі інші функції $g \in L_{\infty,q_2,\ldots,q_n}$ із $||g||_{\infty,q_2,\ldots,q_n} = 1$, які дають знак рівності у (2), збігаються із g_0 майже скрізь, де $f(x) \neq 0$, і при цьому $\operatorname{ess}\sup\limits_{x_1 \in I_1} |g(x)| = \operatorname{ess}\sup\limits_{x_1 \in I_1} |g_0(x)|$ майже для всіх $(x_2, \ldots, x_n) \in I_2 \times \ldots \times I_n$.

Нижченаведена теорема сформульована у статті В.М.Трактинської [3].

Теорема 1. *Для будь-якої функції $f \in L_{p_1,\ldots,p_n}$ $(1 \leq p_i < \infty)$ найкраще наближення за нормою простору $L_{p_1,\ldots,p_n}$*

$$E_m(f)_{p_1,\ldots,p_n} = \sup \int\limits_K f(x)g(x) dx_1 ... dx_n,$$

де $\sup$ *поширений на функції $g \in L_{q_1,\ldots,q_n}$ такі, що $||g||_{q_1,\ldots,q_n} \leq 1$, і $\int\limits_K P_m(x) \cdot g(x) dx_1 ... dx_n = 0$ для будь-якого вищеозначеного полінома P_m, причому* $\sup$ *досягається на деяких функціях $\varphi \in L_{q_1,\ldots,q_n}$ із нормою $||\varphi||_{q_1,\ldots,q_n} = 1$.*

Нехай далі

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k, \tag{3}$$

де $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ – лінійно незалежна система функцій із $L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ $(1 < p_i < \infty,\ i = 2, 3, ..., n)$, а c_k – дійсні числа.

Нехай $f \in L_{1,p_2,\ldots,p_n}$ така, що для кожного P_m норма $||f - P_m|| > 0$.

Уведемо такі функції:

$$F_0 = |f - P^*_m|^{p_2-1}_1 |f - P^*_m|^{p_3-p_2}_{1,p_2} |f - P^*_m|^{p_4-p_3}_{1,p_2,p_3} \cdot ... \cdot |f - P^*_m|^{p_n-p_{n-1}}_{1,p_2,\ldots,p_{n-1}} \operatorname{sgn}(f - P^*_m),$$

$$F_0^* = \frac{F_0}{||f - P_m^*||_{1,p_2,...,p_n}^{p_n - 1}},$$

де P_m^*– деякий поліном вигляду (3).

Легко помітити, що F_0^* має вигляд функції, для якої в нерівності вигляду (2) досягається знак рівності: $F_0^* \in L_{\infty,q_2,...,q_n}$, $||F_0^*||_{\infty,q_2,...,q_n} = 1$ і

$$\int\limits_K (f - P_m^*) F_0^* dx_1, , , dx_n = ||f - P_m^*||_{1,p_2,...,p_n}.$$

Позначимо для кожного $(x_2, ..., x_n) \in I_2 \times \ldots \times I_n$

$$e(x_2, ..., x_n) = \{x_1 \in I_1 : f - P_m^* = 0\}.$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб поліном P_m^* був поліномом найкращого наближення для функції f у метриці $L_{1,p_2,...,p_n}$ $(1 < p_i < \infty,\ i = 2, 3, ..., n)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого полінома P_m вигляду (3) виконувалася умова*

$$\left| \int\limits_K P_m \cdot F_0^* dx_1 ... dx_n \right| \le \int\limits_{I_1} ... \int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| dx_1 \right] \left[\operatorname*{ess\,sup}_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right] dx_2 ... dx_n. \qquad (4)$$

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай P_m^* – поліном найкращого наближення для функції f у метриці $L_{1,p_2,...,p_n}$. Тоді за теоремою 1 існує така функція $F_1 \in L_{\infty,q_2,...,q_n}$, що:

1) $||F_1||_{\infty,q_2,...,q_n} = 1$;

2) для кожного P_m вигляду (3) $\int\limits_K P_m \cdot F_1 dx_1 ... dx_n = 0$;

3) $\int\limits_K f \cdot F_1 dx_1 ... dx_n = \int\limits_K (f - P_m^*) F_1 dx_1 ... dx_n = ||f - P_m^*||_{1,p_2,...,p_n}$.

Остання рівність має місце лише тоді, коли F_1 задовольняє умову рівності в нерівності (2), отже, $F_0^*(x) = F_1(x)$ для всіх точок x, для яких $f - P_m^* \neq 0$, а також $\operatorname*{ess\,sup}_{x_1 \in I_1} |F_0^*| = \operatorname*{ess\,sup}_{x_1 \in I_1} |F_1|$ майже скрізь на $I_2 \times \ldots \times I_n$. Тоді для кожного полінома P_m маємо

$$\left| \int\limits_K P_m \cdot F_0^* dx_1 ... dx_n \right| = \left| \int\limits_K P_m \cdot (F_0^* - F_1) dx_1 ... dx_n \right| \le \int\limits_K |P_m| \cdot |F_0^* - F_1| dx_1 ... dx_n =$$

$$= \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| \cdot |F_0^* - F_1| dx_1 ... dx_n = \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| \cdot |F_1| dx_1 ... dx_n \le$$

$$\le \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \left[\left(\int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| dx_1 \right) \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right) \right] dx_2 ... dx_n,$$

що й потрібно було довести.

Доведемо достатність. Нехай для кожного полінома P_m вигляду (3) виконується умова (4).

Тоді, застосувавши наприкінці нерівність (4), для кожного полінома $Q_m = P_m^* + P_m$ одержимо

$$||f - Q_m||_{1,p_2,...,p_n} = ||f - P_m^* - P_m||_{1,p_2,...,p_n} \cdot ||F_0^*||_{\infty,q_2,...,q_n} \geq$$

$$\geq \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{I_1} |f - P_m^* - P_m| dx_1 \right) \left(\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right) dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{I_1 \setminus e(x_2,...,x_n)} |f - P_m^* - P_m| dx_1 \right) \left(\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right) dx_2 ... dx_n +$$

$$+ \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| dx_1 \right) \left(\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right) dx_2 ... dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \int\limits_{I_1 \setminus e(x_2,...,x_n)} (f - P_m^* - P_m) \cdot F_0^* dx_1 ... dx_n +$$

$$+ \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| dx_1 \right) \left(\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right) dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int\limits_{K} (f - P_m^*) F_0^* dx_1 ... dx_n - \int\limits_{K} P_m F_0^* dx_1 ... dx_n +$$

$$+ \int\limits_{I_n} ... \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{e(x_2,...,x_n)} |P_m| dx_1 \right) \left(\operatorname{ess}\sup_{x_1 \in I_1} |F_0^*| \right) dx_2 ... dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{K} (f - P_m^*) F_0^* dx_1 ... dx_n = ||f - P_m^*||_{1,p_2,...,p_n}.$$

Це означає, що P_m^* – поліном найкращого наближення для f у метриці $L_{1,p_2,...,p_n}$. Теорему доведено.

Розглянемо випадок наближення функцій у метриці простору $L_{p_1,...,p_{n-1},1}$.

Нехай тепер $f \in L_{p_1,...,p_{n-1},1}$ із $||f||_{p_1,...,p_{n-1},1} > 0$ та $g \in L_{q_1,...,q_{n-1},\infty}$ із $||g||_{q_1,...,q_{n-1},\infty} \leq 1$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $1 < p_i < \infty, i = 1, 2, ..., n-1$.

Застосовуючи нерівність Гельдера і теорему Фубіні, одержуємо

$$\int\limits_K f(x)\cdot g(x)dx_1...dx_n \le \int\limits_K |f|\cdot|g|dx_1...dx_n \le$$

$$\le \int\limits_{I_n}...\int\limits_{I_2}\left(\int\limits_{I_1}|f|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int\limits_{I_1}|g|^{q_1}dx_1\right)^{\frac{1}{q_1}}dx_2...dx_n \le ... \le$$

$$\le \int\limits_{I_n}...\int\limits_{I_3}\left[\left(\int\limits_{I_2}\left(\int\limits_{I_1}|f|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\left(\int\limits_{I_2}\left(\int\limits_{I_1}|g|^{q_1}dx_1\right)^{\frac{q_2}{q_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{q_2}}\right]dx_3...dx_n \le$$

$$\le ... \le \int\limits_{I_n}|f|_{p_1,...,p_{n-1}}\cdot|g|_{q_1,...,q_{n-1}}dx_n \le \int\limits_{I_n}|f|_{p_1,...,p_{n-1}}dx_n\cdot \operatorname{ess}\sup_{x_n\in I_n}|g|_{q_1,...,q_{n-1}} =$$

$$= ||f||_{p_1,...,p_{n-1},1}\cdot||g||_{q_1,...,q_{n-1},\infty} \le ||f||_{p_1,...,p_{n-1},1},$$

тобто

$$\int\limits_K f(x)g(x)dx_1...dx_n \le ||f||_{p_1,...,p_{n-1},1}. \tag{5}$$

Розглянемо функцію $g_0 \in L_{q_1,...,q_{n-1},\infty}$ вигляду

$$g_0 = |f|^{p_1-1}|f|_{p_1}^{p_2-p_1}...|f|_{p_1,...,p_{n-2}}^{p_{n-1}-p_{n-2}}|f|_{p_1,...,p_{n-1}}^{1-p_{n-1}}\cdot \operatorname{sgn} f.$$

Легко довести, що для такої функції в нерівності (5) досягається знак рівності і що всі інші функції $g \in L_{q_1,...,q_{n-1},\infty}$ із $||g||_{q_1,...,q_{n-1},\infty} = 1$, які дають знак рівності у (5), збігаються із g_0 майже скрізь на $I_1\times...\times I_{n-1}\times(I_n\backslash E)$, де $E = \{x_n \in I_n : |f|_{p_1,...,p_{n-1}} = 0\}$.

Нехай далі

$$P_m(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(x), \tag{6}$$

де $\{\psi_k\}_{k=1}^{k=m}$ – лінійно незалежна система функцій з $L_{p_1,...,p_{n-1},1}$, $c_k \in \mathbb{R}$.

Уведемо функцію

$$G_0 = |f-P_m^*|^{p_1-1}|f-P_m^*|_{p_1}^{p_2-p_1}\cdot...\cdot|f-P_m^*|_{p_1,...,p_{n-2}}^{p_{n-1}-p_{n-2}}|f-P_m^*|_{p_1,...,p_{n-1}}^{1-p_{n-1}}\operatorname{sgn}(f-P_m^*),$$

де P_m^* – деякий поліном вигляду (6).

Позначимо $E^* = \{x_n \in I_n : |f-P_m^*|_{p_1,...,p_{n-1}} = 0\}$.

Нехай $f \in L_{p_1,...,p_{n-1},1}$ не є поліном вигляду (6). Тоді має місце така теорема.

Теорема 3. *Для того щоб поліном P_m^* був поліномом найкращого наближення для функції f у метриці $L_{p_1,...,p_{n-1},1}$ $(1 < p_i < \infty, i = 1,2,...,n-1)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого полінома P_m вигляду (6) виконувалася умова*

$$\left|\int\limits_K P_m\cdot G_0dx_1...dx_n\right| \le \int\limits_{E^*}|P_m|_{p_1,...,p_{n-1}}dx_n. \tag{7}$$

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай P_m^* – поліном найкращого наближення для f. Тоді за теоремою 1 існує функція $F_2 \in L_{q_1,\dots,q_{n-1},\infty}$ така, що:

1) $||F_2||_{q_1,\dots,q_{n-1},\infty} = 1$;

2) для кожного P_m вигляду (6) $\int\limits_K P_m \cdot F_2 dx_1 \dots dx_n = 0$;

3) $\int\limits_K f \cdot F_2 dx_1 \dots dx_n = \int\limits_K (f - P_m^*) F_2 dx_1 \dots dx_n = ||f - P_m^*||_{p_1,\dots,p_{n-1},1}$.

Остання рівність має місце лише тоді, коли F_2 задовольняє умову рівності в нерівності (5), отже, $G_0(x) = F_2(x)$ для всіх точок x, для яких $x_n \notin E^*$, а також $|F_2|_{q_1,\dots,q_{n-1}} = ||F_2||_{q_1,\dots,q_{n-1},\infty} = 1$, $|G_0|_{q_1,\dots,q_{n-1}} = ||G_0||_{q_1,\dots,q_{n-1},\infty} = 1$. Тоді для кожного полінома P_m маємо

$$\left| \int\limits_K P_m \cdot G_0 dx_1 \dots dx_n \right| = \left| \int\limits_K P_m \cdot (G_0 - F_2) dx_1 \dots dx_n \right| \leq \int\limits_K |P_m||G_0 - F_2| dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{E^*} \int\limits_{I_{n-1}} \dots \int\limits_{I_1} |P_m| \cdot |G_0 - F_2| dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{E^*} \int\limits_{I_{n-1}} \dots \int\limits_{I_1} |P_m||F_2| dx_1 \dots dx_n \leq$$

$$\leq \int\limits_{E^*} \int\limits_{I_{n-1}} \dots \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{I_1} |P_m|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int\limits_{I_1} |F_2|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} dx_2 \dots dx_n \leq$$

$$\leq \dots \leq \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} \cdot |F_2|_{q_1,\dots,q_{n-1}} dx_n = \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n,$$

що й потрібно було довести.

Доведемо достатність. Нехай для кожного полінома P_m вигляду (6) виконується умова (7).

Тоді для кожного полінома $Q_m = P_m^* + P_m$ одержимо

$$||f - Q_m||_{p_1,\dots,p_{n-1},1} = ||f - P_m^* - P_m||_{p_1,\dots,p_{n-1},1} = \int\limits_{I_n} |f - P_m^* - P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n =$$

$$= \int\limits_{I_n \setminus E^*} |f - P_m^* - P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n + \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n =$$

$$= \int\limits_{I_n \setminus E^*} |f - P_m^* - P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n \cdot ||G_0||_{q_1,\dots,q_{n-1},\infty} + \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{I_n \setminus E^*} |f - P_m^* - P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x_n \in I_n \setminus E^*} |G_0|_{q_1,\dots,q_{n-1}} + \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{I_n \setminus E^*} |f - P_m^* - P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} \cdot |G_0|_{q_1,\dots,q_{n-1}} dx_n + \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\dots,p_{n-1}} dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{I_n \setminus E^*} \int\limits_{I_{n-1}} |f - P_m^* - P_m|_{p_1,...,p_{n-2}} \cdot |G_0|_{q_1,...,q_{n-2}} dx_{n-1} dx_n + \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,...,p_{n-1}} dx_n \geq$$

$$\geq ... \geq \int\limits_{I_n \setminus E^*} \int\limits_{I_{n-1}} ... \int\limits_{I_1} |f - P_m^* - P_m||G_0| dx_1 ... dx_n + \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,...,p_{n-1}} dx_n \geq$$

$$\geq \int\limits_{I_n \setminus E^*} \int\limits_{I_{n-1}} ... \int\limits_{I_1} (f - P_m^*) \cdot G_0 dx_1 ... dx_n - \int\limits_{I_n \setminus E^*} \int\limits_{I_{n-1}} ... \int\limits_{I_1} P_m \cdot G_0 dx_1 ... dx_n +$$

$$+ \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,...,p_{n-1}} dx_n = \int\limits_{K} (f - P_m^*) G_0 dx_1 ... dx_n - \int\limits_{K} P_m \cdot G_0 dx_1 ... dx_n +$$

$$+ \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,...,p_{n-1}} dx_n \geq \int\limits_{K} (f - P_m^*) G_0 dx_1 ... dx_n = ||f - P_m^*||_{p_1,...,p_{n-1},1}.$$

Це означає, що P_m^* – поліном найкращого наближення для f у метриці $L_{p_1,...,p_{n-1},1}$. Теорему доведено.

Бібліографічні посилання

1. *Смирнов, Г. С.* Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой [Текст]/ Г. С. Смирнов // Укр. мат. журн. — 1973. — Т. 25, № 1. — С. 134–138.
2. *Смирнов, Г. С.* Критерий полинома наилучшего приближения в пространствах $L_{p,1}$, $L_{1,q}$ [Текст]/ Г. С. Смирнов // Там же. — Т. 25, № 3. — С. 415–419.
3. *Трактинская, В. Н.* Характеризация элемента наилучшего интегрального приближения функций многих переменных [Текст]/В.Н.Трактинская // Вісн. ДНУ. Сер.: Математика. —2007. — Вип. 12. — С. 134–136.

Надійшла до редколегії 01.05.2016